Title	実解析関数に対するモティヴィック・ゼータ関数とブロー解析同程度特異性問題への応用 (特異点論における新しい方法と対象)
Author(s)	小池, 敏司; パルシンスキー, アダム
Citation	数理解析研究所講究録 (2004), 1374: 52-78
Issue Date	2004-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/25556
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 1374 巻 2004 年 52-78

実解析関数に対するモティヴィック・ゼータ関数とブロー解析同程度特異性問題への応用

兵庫教育大学学校教育学部　小池敏司 (Satoshi Koike)
Faculty of School Education, Hyogo University of Teacher Education
アンジェ大学数学教室　アダム・パルシンスキー (Adam Parusiński)
Département de Mathématiques, Université d'Angers

表題に出て来る「ブロー解析性」とは、シドニー大学の Tzee-Char Kuo によって、実解析関数芽の同程度特異性問題に関連して導入された概念である。ブロー解析同値の定義ならびにその性質のいくつかは次節で述べることにして、表題にあるもう一つの「実解析関数に対するモティヴィック・ゼータ関数」とも絡めて、ここでは、その歴史的な流れについて簡単に書くことにする。

この方面における Kuo の最初の論文は [40] で、初期斉次形式が孤立特異点を持つ実解析関数芽族が、原点ブローアップという改変を通して、パラメータ不変な解析同型写像から導入される位相同型写像によって位相自明になることが示された。これは、単に関数族が位相自明になるよりも強い概念である。その後、非退化なニュートン境界の条件のもとや初期擬斉次形式の孤立特異点の条件のもとにブロー解析自明性定理が成り立つことが、それぞれ、福井－吉永 [21] と福井－ Paunescu [24] によって示された。これらの自明性定理は、実解析関数芽がブロー解析的な意味で、どのようなときに同じになるかを知る上で非常に役立つ。

また、Kuo は孤立特異点を持つ実解析関数芽族に対し、パラメータ空間の連結な解析多様体への局所有限な分割で、同じ多様体上にパラメータ値を取る任意の 2 つの関数芽はブロー解析同値になるものが存在することを示した ([39, 41])。このことは、実解析関数芽の空間のなかで一般的 (generic) なものである孤立特異点を持つ関数芽に対しては、ブロー解析性に関してモデュライが現れないことを示している。従って、実解析関数芽族に対する同値関係として、ブロー解析同値が望ましいものであることが保証されている。

一方、ブロー解析的な意味で異なることを示す上で必要になる不変量については、埼玉大学の福井敏純氏によって導入された福井不変量 ([22]) が唯一知られたものであった。次節のいくつかの例でも見るように、福井不変量は 2 変数関数に対する不変量としては、なかなか優れものである。しかし、3 変数以上の関数に対しては、変数のなかの 2 つでその関数の福井不変量が定まるものも多くあり、2 変数関数のときのように優れているとは言えない。そのことが、我々が新たなブロー解析不変量を模索した理由であ

る。我々は 小池 - Parusiński [32] のなかで、Denef-Loeser のモティヴィック・ゼータ関数 ([14, 15, 16, 17, 18]) を参考にして、実解析関数に対するモティヴィック・ゼータ関数を導入し、その計算公式やそれがブロー解析不変量になることの証明、福井不変量や我々の不変量を用いたある種の実解析的特異点のブロー解析分類などを与えた。本稿では、それらの結果ならびに関連する結果を、多くの例と共に紹介する。結果の証明は必ずしも述べていないので、関心を持たれた方は、元の論文を見られたい。

尚、本研究は、アンジェ大学補助金、日本文部科学省科学研究費 (No. 13640070)、日本学術振興会外国人招へい研究者 (短期) の助成を受けている。

§1. ブロー解析同値と福井不変量

最初にブロー解析同値の定義を述べる。

定義 (1,1) (1) 写像 $\mu : M \to N$ を実解析多様体 M から実解析多様体 N の上への固有解析写像とする。μ は正則写像 $\mu^* : \mathcal{U}(M) \to \mathcal{U}(N)$ への拡張を持つ。ただし、$\mathcal{U}(M)$、$\mathcal{U}(N)$ は、それぞれ、M、N の各複素化のなかでの開近傍である。このとき、μ^* が $\mathcal{U}(M)$ の狭い集合 (次元の下がった解析的部分集合) を除いて同型であるときに、μ を**実改変** (real modification) と呼ぶことにする。

(2) 2 つの実解析関数芽 $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ が**ブロー解析同値** (blow-analytically equivalent) であるとは、局所同相写像 $(\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}^d, 0)$、実改変 $\mu : (M, \mu^{-1}(0)) \to (\mathbb{R}^d, 0)$、$\mu' : (M', \mu'^{-1}(0)) \to (\mathbb{R}^d, 0)$ と、実解析同型写像 $\Phi : (M, \mu^{-1}(0)) \to (M', \mu'^{-1}(0))$ が存在して、次の図式が可換になるときにいう：

$$\begin{tikzcd}
(M, \mu^{-1}(0)) \arrow[rr, "\Phi\,:\,\text{解析同型写像}"] \arrow[d, "\mu\,:\,\text{実改変}"'] & & (M', \mu'^{-1}(0)) \arrow[d, "\mu'\,:\,\text{実改変}"'] \\
(\mathbb{R}^d, 0) \arrow[rr, "\phi\,:\,\text{同相写像}"] \arrow[dr, "f"] & & (\mathbb{R}^d, 0) \arrow[dl, "g"'] \\
& (\mathbb{R}, 0) &
\end{tikzcd}$$

更に、μ (または、μ') の臨界値集合は、$f^{-1}(0)$ (または、$g^{-1}(0)$) に含まれるいう仮定も設ける。

解析関数芽 $f : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ に対し、f の特異点集合 $S(f)$ は局所的には f の零点集合 $f^{-1}(0)$ に含まれる。一方、滑らかな中心を持つ有限回のブローアップの合成 μ によって、$f \circ \mu$ は正規交叉になる (広中の定理 [29]、Bierstone - Milman [10])。このと

き、μ の臨界値集合は $S(f)$ に含まれている。従って、上の定義において設けた付随的な仮定は、それほど不自然なものではないことが理解できるであろう。

次に福井不変量を思い起こす。そのために、すこし用語を準備する。$f:(\mathbb{R}^d,0)\to(\mathbb{R},0)$ を解析関数芽とするとき、解析写像芽 $\lambda:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^d,0)$ が f に対する **非負解析弧** (または、**非正解析弧**) であるとは、ある正数 $\delta>0$ が存在して、任意の $t\in[0,\delta)$ に対し $f\circ\delta(t)\geq 0$ (または、$f\circ\delta(t)\leq 0$) が成り立つときにいう。

定理 (1,2) (福井 [22]) 解析関数芽 $f:(\mathbb{R}^d,0)\to(\mathbb{R},0)$ に対し、

$$A(f)=\ \{\ \mathrm{ord}\ (f\circ\lambda)\mid\lambda:\text{解析弧}\ \}$$
$$A_+(f)=\ \{\ \mathrm{ord}\ (f\circ\lambda)\mid\lambda:f\ \text{に対する非負解析弧}\ \}$$
$$A_-(f)=\ \{\ \mathrm{ord}\ (f\circ\lambda)\mid\lambda:f\ \text{に対する非正解析弧}\ \}$$

とおく。このとき、$A(f)$、$A_+(f)$、$A_-(f)$ は、ブロー解析不変量である。

$A(f)$ のことを単に**福井不変量** (Fukui invariant) といい、$A_\pm(f)$ のことを**符号付き福井不変量** (Fukui invariants with sign) と呼ぶことにする。それらを総称して福井不変量 (Fukui invariants) と呼ぶこともある。複素解析関数に対しても、同様に福井不変量 $A(f)$ が定義される。ここで、この福井不変量を用いて、２変数実関数をブロー解析的な意味で区別してみよう。

例 (1,3) (1) $f_i(x,y)=x^3-y^{2i}$ $(i=2,3,\cdots)$ とする。このとき、

$$A(f_i)=\{3,6,\cdots,3(2i-1)\}\cup\{2i,4i\}\cup\{6i,6i+1,6i+2,\cdots\}\cup\{\infty\}$$

である。従って、$i\neq j$ のとき、f_i と f_j は位相同値であるが、$A(f_i)\neq A(f_j)$ より、ブロー解析同値ではない。

更に、これらの関数は、複素関数としては位相同値でないことに注意しておく。

(2) $f(x,y)=x^3-y^8$、$g(x,y)=x^3+y^8$ とする。このときの福井不変量は上のように計算され、$A(f)=A(g)$ であることがわかる。明らかに、f と g は位相同値であるが、$8\notin A_+(f)$、$8\in A_+(g)$ より、ブロー解析同値でない。

この場合には、f と g は複素関数として線形同値である。

例 (1,3)(2) で見たように、実関数に対するある同値関係に対し、何らかの不変量を導入しようとするとき、符号付きのものも考える方が、より細かい分類を与えるであろうことが推察される。このことが、次節の実解析関数に対するモティヴィック・ゼータ関数についても、符号付きのものも考える動機付けになっている。

例 (1,4) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし、$f:(\mathbb{K}^2,0)\to(\mathbb{K},0)$ を $f(x,y)=x^4+y^6$ とする。

(1) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ のとき、

$$A(f)=\{4,6,8,12,16,18,20,24,28,30,32,\cdots\}\cup\{\infty\}$$

(2) $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ のとき、

$$A(f)=\{4,6,8,12,13,14,15,\cdots\}\cup\{\infty\}$$

上の例において、複素の場合の $A(f)$ の構成数は、１２以上の数として等間隔に出て来る。このように、ある数以上が等間隔に現れる福井不変量を**安定的区間状** (stably interval-like) と呼ぶことにする。実の場合には、いくら大きくなっても前後の数の間隔が２となったり、４となったりするので、その福井不変量は安定的区間状ではない。

著者の一人は Nash の論文 [50] からヒントを得て、この福井不変量の安定的区間状に関する次の問題に対し、ブローアップを用いて答えが与えられるのではないかという印象を持った。

問題 (1,5) 福井不変量の安定的区間状の性質を特徴付けよ。それを用いて、福井不変量が安定的区間状でない複素関数を構成せよ。

上の問題は、泉 - 小池 - Kuo [30] のなかで解決された。この節では、この後しばらくは、それに関する結果を述べる。

解析関数芽 $f:(\mathbb{K}^d,0)\to(\mathbb{K},0)$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$) に対し、$\sigma: M\to\mathbb{K}^d$ を $f^{-1}(0)$ の簡約化 (simplification) とする。即ち、σ は有限個のブローアップの合成、M は滑らかで、$f\circ\sigma$ は正規交叉とする。E_i $(i\in J)$ を $\sigma^{-1}(B_\epsilon)$ における $(f\circ\sigma)^{-1}(0)$ の既約成分、ただし、B_ϵ は $0\in\mathbb{K}^d$ を中心とする ϵ-開球とする。各 $i\in J$ に対し、$N_i=mult_{E_i}f\circ\sigma$ とおく。$I\subset J$ に対し、$E_I=\bigcap_{i\in I}E_i$ とし、$\mathring{E}_I=E_I\setminus\bigcup_{j\in J\setminus I}E_j$ とする。ここで、

$$\mathcal{C}=\{I\mid \mathring{E}_I\cap\sigma^{-1}(0)\neq\emptyset\}$$

とおく。必要ならブローアップを続けることにより、$\sigma^{-1}(0)$ はいくつかの E_i の和であると仮定してもよいことに注意する。そのとき、$\mathcal{C}=\{I\mid E_I\subset\sigma^{-1}(0)\}$ である。

集合 $A,B\subset\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ に対し、

$$A+B=\{a+b\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}\mid a\in A,b\in B\}$$

と定義する。ただし、$a=\infty$ または $b=\infty$ のときは、$a+b=\infty$ と約束する。この記法を用いて、$I=(i_1,\cdots,i_p)\in\mathcal{C}$ に対し、

$$\Omega_I(f)=(N_{i_1}\mathbb{N}+\cdots+N_{i_p}\mathbb{N})\cup\{\infty\}$$

とおく。そのとき、福井不変量 $A(f)$ は $\Omega_I(f)$ を用いて、次のように表される。

定理 (1,6) (泉 - 小池 - Kuo [30])

$$A(f)=\bigcup_{I\in\mathcal{C}}\Omega_I(f)$$

公式は単純に見えるが、実際に計算するのは一般には面倒である。２変数のときは、f の既約分解を用いて、より具体的に計算しやすい公式に書き下すことができる。

更に、実数の場合には、記号

$$\mathcal{C}^+ = \{I \in \mathcal{C} \mid \mathring{E}_I \cap \sigma^{-1}(0) \cap \overline{P(f)} \neq \emptyset\}, \qquad P(f) = \{x \in M \mid f \circ \sigma(x) > 0\},$$
$$\mathcal{C}^- = \{I \in \mathcal{C} \mid \mathring{E}_I \cap \sigma^{-1}(0) \cap \overline{N(f)} \neq \emptyset\}, \qquad N(f) = \{x \in M \mid f \circ \sigma(x) < 0\},$$

を準備すると、次の公式が成り立つ。

定理 (1,7) (泉 - 小池 - Kuo [30])

$$A_+(f) = \bigcup_{I \in \mathcal{C}^+} \Omega_I(f), \qquad A_-(f) = \bigcup_{I \in \mathcal{C}^-} \Omega_I(f)$$

再び、$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ の場合に戻って、$I = (i_1, \cdots, i_p) \in \mathcal{C}$ に対し、

$$M_I = \gcd(N_{i_1}, \cdots, N_{i_p})$$

とおく。そのとき、福井不変量の安定的区間状という性質は、次のように特徴付けられる。

定理 (1,8) (泉 - 小池 - Kuo [30]) 福井不変量 $A(f)$ が安定的区間状であるための必要十分条件は、

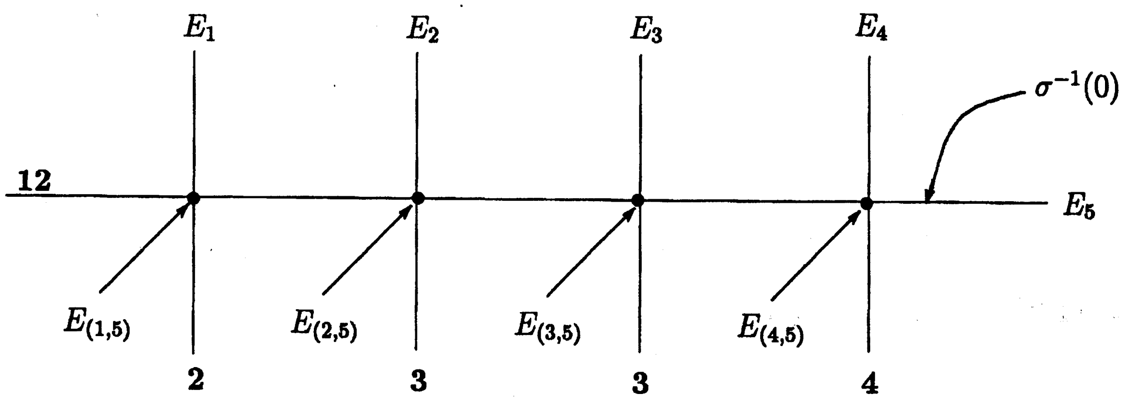
$$\gcd\{M_I \mid I \in \mathcal{C}\} \in \{M_I \mid I \in \mathcal{C}\}$$

である。

例 (1,9) $f : (\mathbb{K}^2, 0) \to (\mathbb{K}, 0)$ を

$$f(x, y) = (x-y)^2(x-2y)^3(x-3y)^3(x-4y)^4$$

とする。



このとき、$\mathcal{C} = \{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), 5\}$ である。$M_{(1,5)} = 2$、$M_{(2,5)} = M_{(3,5)} = 3$、$M_{(4,5)} = 4$、$M_5 = 12$ より、

$$\gcd\{2, 3, 4, 12\} = 1 \notin \{2, 3, 4, 12\}$$

である。定理 (1,8) より、福井不変量は実関数としても複素関数としても安定的区間状でないことがわかる。

次に、実解析関数に対するモティヴィック・ゼータ関数に関する仕事 [32] を始める動機付けとなった例を述べる。その f は、実ジェットと考えて、6-ジェットとしては C^8 級関数に対して C^0-十分だが、7-ジェットとしては C^7 級関数に対して C^0-十分ではない興味深い例として、W. Kucharz [35] によって構成されたものである。

例 (1,10) $f(x,y,z) = x^3 + xy^5 + z^3$、$g(x,y,z) = x^3 + y^7 + z^3$ とする。このとき、f と g の福井不変量は、2 変数多項式 $x^3 + z^3$ の部分で次のように決まってしまう。

$$A(f) = A(g) = A(x^3 + z^3) = A_{\pm}(f) = A_{\pm}(g) = A_{\pm}(x^3 + z^3) = \{3, 4, 5, \cdots\} \cup \{\infty\}$$

従って、福井不変量では、f と g のブロー解析タイプを区別することはできない。

特異点を研究している人には、式の形から推察がつく各レベル曲面の形状から、これらの f と g は大域的に位相同値 (更に、半代数的同値) であることが直観的に明らかであろう。更に、ブロー解析性の研究に従事したことのある人は、f と g は局所的にもブロー解析タイプは異なるはずだと直感するものと思われる。この直感が正しいものとして、これらを局所ブロー解析的な意味で何とか区別したい。そのことが、新しいブロー解析不変量を模索することになった出発点である。

これらの関数 f、g は、実関数としても、複素関数としても、孤立特異点を持つ擬斉次多項式関数である。複素関数としては、Milnor - Orlik 公式 [49] を用いて、$\mu(f) = 26$、$\mu(g) = 24$ とミルナー数が計算される。従って、Lê Dũng Tráng [45] または B. Teissier [60] より、それらの $\mathbb{C}^3$ のなかでの零点集合芽は位相同値でない。

序文でも述べたように、ブロー解析性の研究はシドニー大学の T.C. Kuo によって始められたものである。シドニーでは、かっての弟子で現同僚の L. Paunescu とともに、現在も活発に研究が続けられている。一方、日本におけるこの分野の研究も盛んである。その先駆けとなったのが、1985 年に出版された福井 - 吉永 [21] の研究である。その直後、Kuo の最初の論文 [40] 並びにこの福井 -吉永の結果に対応する複素の場合の位相的な結果 (J. Damon - T. Gaffney [13]、A.G. Kouchnirenko [34]、岡 [52]) の存在や、本人自身の両分野における解析をもとに、日本大学の鈴木正彦氏は両者の間に類似性があることを観察した。

観察 (1,11) (鈴木) 実解析関数芽のブロー解析的性質と複素解析関数芽または複素解析的集合芽の位相的性質は、かなり似ている。

この観察における類似性は、「かなり」であり「非常に」ではない。例 (1,3)(1) からは、それら 2 つの性質がかなり似ていることが読み取れるが、例 (1,3)(2) より、その対応が完全には一致していないこともわかる。

1980 年代後半から 1990 年代前半の特異点研究集会において、鈴木氏は観察 (1,11) を強調し、そこから自然派生する問題の解決を提唱した。実際、鈴木氏は、ミルナー数一定の複素 2 変数解析関数族のニュートン境界の安定性に関する岡の定理 [53] に対応す

るブロー解析自明な実2変数解析関数族のニュートン境界の安定性定理 [58] を示したり、複素超曲面の重複度に関する Zariski 予想 ([68]) に対応して、実解析関数の重複度 (初期形式の次数) のブロー解析不変の証明を試みたりした ([59])。また、初期擬斉次多項式が孤立特異点を持つ実解析関数芽族はブロー解析自明であるという福井 - Paunescu 定理も、同じ条件を持つ複素解析関数芽の零点集合族や関数族自身が位相自明であるいう結果 (V.I. Arnold [3]、J. Damon [12]、H. King [31]) に対応している。このように、複素における位相的な結果から、対応する実のブロー解析的な事柄が問題になる流れが多かった。そんななか、福井氏は、実解析関数の重複度を最小数のメンバーとして含む集合の一つとして福井不変量を導入し、それがブロー解析不変量であることを示した。このことから、観察 (1,11) を通して、福井不変量は複素解析関数芽の位相不変量になるかということが自然に問題になる。これは、ある種の意味で Zariski 予想の一般化にもなっている良問である。福井不変量は、実の場合の結果が先行し、複素の場合に問題を提供した最初のものとしても、きわめて有意義なものである。

例 (1,10) において、f、g を複素関数として、それらの零点集合は位相同値ではなかった。従って、観察 (1,11) が、f、g を実関数としてブロー解析同値でないであろうという直感の根拠になっている。更に、孤立特異点を持つ2変数、3変数複素擬斉次多項式関数の零点集合の位相は、それらの関数の重みを決定することが知られている (吉永 - 鈴木 [67]、西村 [51]、佐伯 [57]、S.S.T. Yau [66])。この性質を観察 (1,11) に当てはめてみると、孤立特異点を持つ n 変数実擬斉次多項式関数芽のブロー解析タイプは、それらの関数の重みを決定するかということが問題がなる。3変数の場合にこの問題が正しければ、例 (1,10) の2つの関数はブロー解析同値ではない。ちなみに、2変数の場合の問題は、最近、埼玉大学の O. M. Abderrahmane Yacoub 氏によって、福井不変量と次節に述べるモティヴィック型不変量を用いることにより、肯定的に解決された ([2])。

この節では、おもにブロー解析同値の定義とその不変量の一つである福井不変量の諸性質を述べた。ブロー解析性については、序でも述べたブロー解析自明性定理、局所有限分類定理や本節の福井不変量以外にも、逆関数定理 ([26])、弧解析性 (arc-analyticity) との関係 ([9]、[43])、ブロー解析同相写像の構成、ブロー解析単元 (blow-analytic unit)、リプシッツ同程度特異性との関係など、多くの研究がある。1997年までのブロー解析性分野の概要について知りたい方は、福井 - 小池 - Kuo [23] をご覧下さい。また、それ以後も、この分野の研究は盛んに続いている。そのあたりの最新のことを知りたい方には、福井 - Paunescu [25] をお勧めする。

§2. 実解析関数に対するモティヴィック・ゼータ関数

[2.1] ゼータ関数の定義

最初に、$0 \in \mathbb{R}^d$ での解析弧の集合とその n 次までの切断弧の集合を考える。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, 0) = \{\gamma : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^d, 0) \mid \gamma : \text{解析写像}\ \}$$

$$\mathcal{L}_n = \{\gamma \in \mathcal{L} \mid \gamma(t) = \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \cdots + \mathbf{a}_n t^n,\ \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^d\}$$

$f:(\mathbb{R}^d,0)\to(\mathbb{R},0)$ を解析関数芽とする。$n\geq 1$ に対し、

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{n,+}(f) = &\ \{\gamma\in\mathcal{L}_n \mid f\circ\gamma = ct^n+\cdots, c>0\}\\ \mathcal{X}_{n,-}(f) = &\ \{\gamma\in\mathcal{L}_n \mid f\circ\gamma = ct^n+\cdots, c<0\}\\ \mathcal{X}_{n}(f) = &\ \{\gamma\in\mathcal{L}_n \mid f\circ\gamma = ct^n+\cdots, c\neq 0\}\end{aligned}$$

とする。そのとき、f に対する**正ゼータ関数** (positive zeta function) 、**負ゼータ関数** (negative zeta function)、**全ゼータ関数** (total zeta function) を、それぞれ、

$$\begin{aligned}Z_{f,+}(T) = &\ \sum_{n\geq 1}(-1)^{-nd}\chi^c(\mathcal{X}_{n,+})T^n\\ Z_{f,-}(T) = &\ \sum_{n\geq 1}(-1)^{-nd}\chi^c(\mathcal{X}_{n,-})T^n\\ Z_{f}(T) = &\ \sum_{n\geq 1}(-1)^{-nd}\chi^c(\mathcal{X}_{n})T^n = Z_{f,+}(T)+Z_{f,-}(T)\end{aligned}$$

と定義する。ただし、 χ^c はコンパクトな台を持つオイラー標数 (Euler characteristic with compact supports) を表す。以後、f が定まっているときには、f を省略して、単に $\mathcal{X}_{n,+}(f)$ を $\mathcal{X}_{n,+}$、$Z_{f,+}$ を Z_+ などと表すこともある。

ここで、後の計算に必要になる、コンパクトな台を持つオイラー標数の性質といくつかの計算の具体例を述べておく。A、B を局所コンパクトな半代数的集合とする。

(I) $\chi^c(A)=\chi^c(A\setminus B)+\chi^c(B)$ (ただし、B は A のなかで閉とする)

$\chi^c(\mathbb{R}_{\geq 0})=\chi^c(\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet)-\chi^c(\bullet)=0$

$\chi^c(\mathbb{R})=\chi^c(\mathbb{R}_{>0})=\chi^c(\mathbb{R}_{<0})=-1$

$\chi^c(\mathbb{R}^*)=\chi^c(\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\cup\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ)=-2$

$\chi^c(\mathbb{P}^1)=\chi^c(S^1)=0$

(II) $\chi^c(A\times B)=\chi^c(A)\cdot\chi^c(B)$

$\chi^c(\mathbb{R}^m)=(-1)^m$

$\chi^c(\mathbb{R}_{\geq 0}\times B)=\chi^c(\mathbb{R}_{\geq 0})\cdot\chi^c(B)=0$

[2.2] Denef-Loeser 公式

解析関数芽 $f:(\mathbb{R}^d,0)\to(\mathbb{R},0)$ に対し、$\sigma: M\to\mathbb{R}^d$ を $f^{-1}(0)$ の簡約化で、$f\circ\sigma$ と σ のヤコビ行列式 $jac\,\sigma$ は正規交叉とする。前節のように、E_i $(i\in J)$ を $\sigma^{-1}(B_\epsilon)$ における $(f\circ\sigma)^{-1}(0)$ の既約成分で、$\sigma^{-1}(0)$ はいくつかの E_i の和であると仮定してよい。各 $i\in J$ に対し、$N_i = mult_{E_i} f\circ\sigma$ 、$\nu_i = mult_{E_i} jac\,\sigma + 1$ とおく。$I\subset J$ に対し、$E_I=\bigcap_{i\in I}E_i$ とし、$\mathring{E}_I = E_I\setminus\bigcup_{j\in J\setminus I}E_j$ とする。このとき、モティヴィック積分に関する変数変換公式 (change of variables formula) の議論 (M. Kontsevich [33]、J.

Denef - F. Loeser [15]、E. Looijenga [47]) を用いることにより、全ゼータ関数に対する Denef-Loeser 型公式を得る。

定理 (2,1) ([32])

$$Z(T) = \sum_{I \neq \emptyset} (-2)^{|I|} \chi^c(\mathring{E}_I \cap \sigma^{-1}(0)) \prod_{i \in I} \frac{(-1)^{\nu_i} T^{N_i}}{1-(-1)^{\nu_i} T^{N_i}}$$

次に、$\mathring{E}_{I,k}$ を $\mathring{E}_I$ の連結成分とし、$x \in \mathring{E}_{I,k}$ とする。そのとき、x の近くにおいて、$f \circ \sigma \neq 0$ の領域は、$(f \circ \sigma)^{-1}(0)$ によって $2^{|I|}$ 個の部屋に区切られる。$\alpha_+(\mathring{E}_{I,k})$ (または、$\alpha_-(\mathring{E}_{I,k})$) で、$f \circ \sigma$ が正 (または、負) の部屋の個数を表すことにする。再び、変数変換公式の議論を用いることにより、符号付きゼータ関数に対する公式を得る。

定理 (2,2) ([32])

$$Z_\pm(T) = \sum_{I \neq \emptyset} (-1)^{|I|} \Big(\sum_k \alpha_\pm(\mathring{E}_{I,k}) \chi^c(\mathring{E}_{I,k} \cap \sigma^{-1}(0)) \Big) \prod_{i \in I} \frac{(-1)^{\nu_i} T^{N_i}}{1-(-1)^{\nu_i} T^{N_i}}$$

単純に式だけを眺めると、ゼータ関数の定義式の方が簡単で、計算公式のほうが複雑である。しかし、関数 f の定義式がよほど簡単な場合を除いて、一般には、$\mathcal{X}_n$、$\mathcal{X}_{n,+}$ や $\mathcal{X}_{n,-}$ の正体を把握することは難しく、それらのコンパクトな台を持つオイラー標数を計算するのは困難である。それに比べると公式の方は、頑張って $f^{-1}(0)$ の簡約化ができてしまえば、後の $\mathring{E}_I$ や $\mathring{E}_{I,k}$ のコンパクトな台を持つオイラー標数の計算は容易である。このことを踏まえて、次に、公式を用いたゼータ関数の計算例を述べる。

例 (2,3) $f(x) = x^m$ とする。$\sigma = id$ と思うことにしよう。そのとき、$N = m$、$\nu = 0+1 = 1$ である。従って、

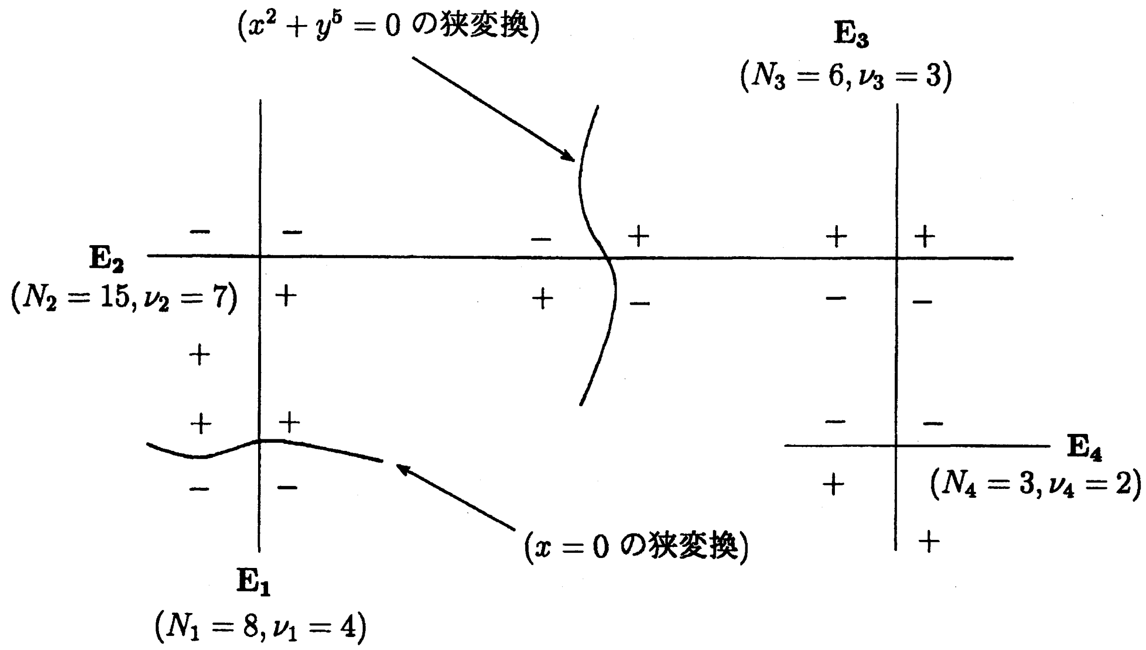
$$Z(T) = (-2)\frac{-T^m}{1+T^m} = 2(T^m - T^{2m} + T^{3m} - \cdots)$$

m が奇数のとき、$Z_+(T) = Z_-(T) = \frac{1}{2}Z(T) = T^m - T^{2m} + T^{3m} - \cdots$

m が偶数のとき、$Z_+(T) = Z(T) = 2(T^m - T^{2m} + T^{3m} - \cdots)$、$Z_-(T) = 0$

この例では、f は一変数の単項式からのみなるので、その定義に戻ってゼータ関数を計算するのも、それほど面倒ではない。時間のある方は、試してみて下さい。

例 (2,4) $f(x,y) = x^3 + xy^5 = x(x^2+y^5)$ とする。このとき、f のトーリック特異点解消を用いるか、または、一点ブローアップを何度か施すことにより、次の特異点解消ツリー (resolution tree) を得ることができる。



このツリーから得られた情報より、ゼータ関数は、公式を用いて次のように求まる。

$$
\begin{aligned}
Z(T) &= 4\frac{T^8}{1-T^8} - 6\frac{T^{15}}{1+T^{15}} - 4\frac{T^6}{1+T^6} + 2\frac{T^3}{1-T^3} - 4\frac{T^8}{1-T^8}\frac{T^{15}}{1+T^{15}} \\
&+4\frac{T^{15}}{1+T^{15}}\frac{T^6}{1+T^6} - 4\frac{T^6}{1+T^6}\frac{T^3}{1-T^3} - 4\frac{T^8}{1-T^8}\frac{T}{1+T} + 4\frac{T^{15}}{1+T^{15}}\frac{T}{1+T}
\end{aligned}
$$

$$Z_+(T) = Z_-(T) = \tfrac{1}{2}Z(T)$$

[2.3] Thom-Sebastiani 公式

小節 [2,2] では、ゼータ関数を計算する一般の公式を述べたが、ここでは具体的な計算で役立つ Thom-Sebastiani 公式を述べる。それは、変数が独立の二つの関数の和として定義される関数のゼータ関数を、元の関数のゼータ関数の情報で表すものである。

解析関数芽 $f:(\mathbb{R}^{d_1},0)\to(\mathbb{R},0)$、$g:(\mathbb{R}^{d_2},0)\to(\mathbb{R},0)$ に対し、$f*g:(\mathbb{R}^{d_1+d_2},0)\to(\mathbb{R},0)$ を

$$(f*g)(x,y)=f(x)+g(y)$$

と定義する。

$$Z_{f,\pm}(T)=\sum a_i^{\pm}T^i,\quad Z_{g,\pm}(T)=\sum b_i^{\pm}T^i,\quad Z_{f*g,\pm}(T)=\sum c_i^{\pm}T^i$$

(複号同順) と表すと、そのとき、

$$Z_f(T)=\sum a_iT^i,\quad Z_g(T)=\sum b_iT^i,\quad Z_{f*g}(T)=\sum c_iT^i$$

となる。ただし、$a_i = a_i^+ + a_i^-$ 他である。更に、$A_n = 1 - \sum_1^n a_i$ $(n \geq 1)$、$A_0 = 1$ とおくと、$\sum_{i\geq 0} A_i T^i = \frac{1-Z_f(T)}{1-T}$ となる。同様に、B_n $(n \geq 0)$ も定義しておく。このとき、次の関係式を得る。

定理 (2,5) ([32])

$$c_n^+ = a_n^+ b_n^+ + a_n^+ B_n + A_n b_n^+ + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} (a_i^+ b_i^- + a_i^- b_i^+)$$

$$c_n^- = a_n^- b_n^- + a_n^- B_n + A_n b_n^- + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} (a_i^+ b_i^- + a_i^- b_i^+)$$

$$c_n = a_n^+ b_n^+ + a_n^- b_n^- + a_n B_n + A_n b_n + 2 \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} (a_i^+ b_i^- + a_i^- b_i^+)$$

上の符号付きゼータ関数を改造して、新たな符号付きゼータ関数を次のように定義する。

$$\widetilde{Z}_{f,+}(T) = \sum_{n\geq 1} \tilde{A}_n^+ T^n, \quad \widetilde{Z}_{f,-}(T) = \sum_{n\geq 1} \tilde{A}_n^- T^n$$

ここで、$\tilde{A}_n^+ = A_n + a_n^+$ 、$\tilde{A}_n^- = A_n + a_n^-$ である。そのとき、もとの符号付きゼータ関数と新たな符号付きゼータ関数の間には、

$$\widetilde{Z}_{\pm}(T) = \frac{1 - Z(T)}{1 - T} - 1 + Z_{\pm}(T)$$

(複号同順) の関係が成り立つ。また、新たな全ゼータ関数を

$$\widetilde{Z}(T) = \widetilde{Z}_{-}(T) + \widetilde{Z}_{+}(T)$$

と定義すれば, 二つの全ゼータ関数の間には、

$$\frac{1 - Z(T)}{1 - T} = \frac{1 + \widetilde{Z}(T)}{1 + T}$$

の関係が成り立つ。次に、

$$\widetilde{Z}_{f,\pm}(T) = \sum_{i\geq 1} \tilde{A}_i^{\pm} T^i, \quad \widetilde{Z}_{g,\pm}(T) = \sum_{i\geq 1} \tilde{B}_i^{\pm} T^i, \quad \widetilde{Z}_{f*g,\pm}(T) = \sum_{i\geq 1} \tilde{C}_i^{\pm} T^i$$

(複号同順) とおく。そのとき、新たな符号付きゼータ関数に関して、定理 (2,5) のものと比べてすっきりとした Thom-Sebastiani 公式が成り立つ。

定理 (2,6) ([32])

$$\tilde{C}_n^+ = \tilde{A}_n^+ \, \tilde{B}_n^+, \quad \tilde{C}_n^- = \tilde{A}_n^- \, \tilde{B}_n^-$$

定理 (2,5) と定理 (2,6) の Thom-Sebastiani 公式は、現れた形が異なるだけで、実際は、同値な公式である。定理 (2,5) と定理 (2,6) は、同様の論法で示されるが、後者は定理の主張だけでなくその証明も前者より簡単である。そういう訳で、論文 [32] では、

後者の証明のみを詳しく述べ、前者はその概形のみ記した。この小節の最後で、そこで述べなかった定理 (2,5) の詳細な証明を与える。ひとたび、定理 (2,5) が正しいことが認められてしまうと、定理 (2,5) から定理 (2,6) を導くのは、次の形式的な級数の和に関する計算問題に帰着できる。

練習問題 1. $\{a_n^+\}$、$\{a_n^-\}$、$\{b_n^+\}$、$\{b_n^-\}$ を実数列、$\{a_n\}$、$\{b_n\}$ を $a_n = a_n^+ + a_n^-$, $b_n = b_n^+ + b_n^-$ で定義される数列とし、$A_n = 1 - \sum_{i=1}^n a_i$, $B_n = 1 - \sum_{i=1}^n b_i$ とおく。さらに、$\{c_n^+\}$、$\{c_n^-\}$、$\{c_n\}$ を

$$c_n^+ = a_n^+ b_n^+ + a_n^+ B_n + A_n b_n^+ + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} (a_i^+ b_i^- + a_i^- b_i^+),$$

$$c_n^- = a_n^- b_n^- + a_n^- B_n + A_n b_n^- + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} (a_i^+ b_i^- + a_i^- b_i^+),$$

$$c_n = a_n^+ b_n^+ + a_n^- b_n^- + a_n B_n + A_n b_n + 2 \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} (a_i^+ b_i^- + a_i^- b_i^+)$$

で定義された数列とする。このとき、

$$C_n = 1 - \sum_{i=1}^{n} c_i, \quad \tilde{A}_n^{\pm} = A_n + a_n^{\pm}, \quad \tilde{B}_n^{\pm} = B_n + b_n^{\pm}, \quad \tilde{C}_n^{\pm} = C_n + c_n^{\pm}$$

(複号同順) とおくと、$\tilde{C}_n^{\pm} = \tilde{A}_n^{\pm}\ \tilde{B}_n^{\pm}$ (複号同順) が成り立つことを示せ。

ここで、ゼータ関数に関する Thom-Sebastiani 公式の系を一つ述べる。

系 (2,7) ([32]) $f(x) = x^m$ (m は偶数) とする。このとき、$Z_{g,\pm}(T)$ は $Z_{f*g,\pm}(T)$ から求まる。

(証明) 定理 (2,5) より、

$$c_n^{\pm} = (A_{n-1} - a_n^{\pm}) b_n^{\pm} + a_n^{\pm} B_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} (a_i^{\pm} b_i^{\mp} + a_i^{\mp} b_i^{\pm})$$

(複号同順) である。一方、例 (2,3) より、$n > 0$ に対し、$A_{n-1} - a_n^{\pm} \neq 0$ であることがわかる。従って、$b_n^{\pm}$ は $c_i^{\pm}$、$a_i^{\pm}$ $(i \leq n)$ を用いて帰納的に求まる。

上の系より、$f(x) = x^m$ (m は偶数) のとき、解析関数芽 g_1, $g_2 : (\mathbb{R}^{d_2}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ に対し、

$$Z_{g_1,\pm}(T) \neq Z_{g_2,\pm}(T) \ \Rightarrow\ Z_{f*g_1,\pm}(T) \neq Z_{f*g_2,\pm}(T)$$

であることがわかる。

本小節では、ゼータ関数に関する Thom-Sebastiani 公式ついて述べてきたが、福井不変量についても Thom-Sebastiani 公式が成り立つ。それも述べておこう。そのために、解

析関数芽 $f : (\mathbb{R}^{d_1}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$、$g : (\mathbb{R}^{d_2}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ に対し、$f * g : (\mathbb{R}^{d_1+d_2}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ を上と同様に定義しておく。

定理 (2,8) ([32]) $M_1 = \min(A_+(f) \cap A_-(g))$、$M_2 = \min(A_-(f) \cap A_+(g))$ とおく。そのとき、次が成り立つ。

(1) $A(f * g) = A(f) \cup A(g) \cup (M_1 + \mathbb{N}) \cup (M_2 + \mathbb{N})$

(2) $A_+(f * g) = A_+(f) \cup A_+(g) \cup (M_1 + \mathbb{N}) \cup (M_2 + \mathbb{N})$

(3) $A_-(f * g) = A_-(f) \cup A_-(g) \cup (M_1 + \mathbb{N}) \cup (M_2 + \mathbb{N})$

上の定理の (2)、(3) は、(1) と同様に証明できる。(1) の証明において、$\subset$ の部分は初等整数論を用いた集合論的議論で容易に示される。一方、$\supset$ の部分において、$A(f*g) \supset A(f)$、$A(g)$ は明らかである。従って、$A(f * g) \supset M_1 + \mathbb{N}$、$M_2 + \mathbb{N}$ を示せばよい。その証明の核となるアイデアは、次の級数の変換問題として要約される。

練習問題 2. 一変数実係数多項式で次の形のもの

$$H(T) = c_1 T + c_2 T^2 + \cdots + c_p T^p, \qquad c_1 \neq 0$$

を（原点での）多項式変換とよぶことにする。

n を自然数とし、実数 a_i、b_i $(i = n, n+1, \cdots)$、ただし、a_n、$b_n \neq 0$、を係数に持つ 2 つの無限級数

$$A(T) = a_n T^n + a_{n+1} T^{n+1} + \cdots, \qquad B(T) = b_n T^n + b_{n+1} T^{n+1} + \cdots$$

を考える。n が偶数の場合、a_n と b_n は異符号とする。

m を n より大きい自然数とするとき、

$$B(H(T)) = -a_n T^n - \cdots - a_{m-1} T^{m-1} + \hat{b}_m T^m + b'_{m+1} T^{m+1} + \cdots, \qquad a_m + \hat{b}_m \neq 0$$

となる多項式変換 $H(T)$ が存在することを示せ。

再び、ゼータ関数の Thom-Sebastiani 公式の話しに戻る。まず、定理 (2,5) の証明のために必要になる二つの補題を準備する。

補題 (2,9) 定理 (2,5) に関する記号のもと、

$$A_n = (-1)^{nd_1} \chi^c(\{\gamma \in \mathcal{L}_n \mid \mathrm{ord}_t\, f \circ \gamma > n\})$$

である。

(証明) $\pi_{n,i} : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_i$ を i 次の切断による自然な射影とすると、それは、$\mathbb{R}^{(n-i)d_1}$ に同型なファイバーを持つ自明なファイブレーションである。このとき、

$$\mathcal{L}_n = \pi_{n,1}^{-1}(\mathcal{X}_1) \cup \pi_{n,2}^{-1}(\mathcal{X}_2) \cup \cdots \cup \pi_{n,n-1}^{-1}(\mathcal{X}_{n-1}) \cup \mathcal{X}_n \cup \{\gamma \in \mathcal{L}_n \mid \mathrm{ord}_t\, f \circ \gamma > n\}$$

である。その両辺のコンパクトな台を持つオイラー標数をとり、式変形すると、

$$\chi^c(\{\gamma \in \mathcal{L}_n \mid \mathrm{ord}_t\ f\circ\gamma > n\}) = \chi^c(\mathcal{L}_n) - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{(n-i)d_1}\chi^c(\mathcal{X}_i) = (-1)^{nd_1} - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{nd_1}a_i$$

となり、補題が言える。

4節で与える練習問題2の解答における帰納法の第2段階と同様の議論を用いることにより、次の補題が示される。

補題 (2,10) $\varphi_i : \{\gamma \in \mathcal{L}_n \mid \mathrm{ord}_t\ f\circ\gamma = i\} \to \mathbb{R}$ を γ に対し、

$$(f\circ\gamma)(t) = d_i t^i + d_{i+1}t^{i+1} + \cdots$$

の係数 d_n を対応させる写像とする。そのとき、$i < n$ に対し、φ_i は自明なファイブレーションである。

さて、定理 (2,5) の証明を始めよう。他も同様なので、(1) のみ示す。$d = d_1 + d_2$ とすると、

$$c_n^+ = (-1)^{nd}\chi^c((\mathcal{L}_n(f)\times\mathcal{L}_n(g))\cap\mathcal{X}_{n,+}(f*g)) \tag{0.1}$$

となる。ただし、

$$(\mathcal{L}_n(f)\times\mathcal{L}_n(g))\cap\mathcal{X}_{n,+}(f*g) = \{(\gamma_1,\gamma_2) \mid f(\gamma_1(t)) + g(\gamma_2(t)) = ct^n + \cdots, c > 0\}$$

である。もし、$\mathrm{ord}_t\,(f(\gamma_1(t)) + g(\gamma_2(t))) = n$ であるならば、

$\mathrm{ord}_t\ f(\gamma_1(t)) = \mathrm{ord}_t\ g(\gamma_2(t)) < n$ であるか、$\mathrm{ord}_t\ f(\gamma_1(t)) \geq n$ かつ $\mathrm{ord}_t\ g(\gamma_2(t)) \geq n$

である。従って、

$$Z = \{(\gamma_1,\gamma_2) \mid \mathrm{ord}_t\ f(\gamma_1(t)) \geq n,\ \mathrm{ord}_t\ g(\gamma_2(t)) \geq n\}$$
$$Z_i = \{(\gamma_1,\gamma_2) \mid \mathrm{ord}_t\ f(\gamma_1(t)) = \mathrm{ord}_t\ g(\gamma_2(t)) = i\}$$

とおくと、

$$(\mathcal{L}_n(f)\times\mathcal{L}_n(g))\cap\mathcal{X}_{n,+}(f*g) = (Z\cap\mathcal{X}_{n,+}(f*g)) \cup \bigcup_{i=1}^{n-1}(Z_i\cap\mathcal{X}_{n,+}(f*g)) \tag{0.2}$$

となる。

写像 $\Phi : Z \to \mathbb{R}^2_{(\varphi,\psi)}$ を (γ_1,γ_2) に対し、$f(\gamma_1(t))$、$g(\gamma_2(t))$ の t^n の係数を対応させるものと定義する。そのとき、$\Phi(Z) \subset \mathbb{R}^2$ の次の滑層集合上、Φ は自明である：

$$\{\varphi > 0, \psi > 0\},\ \{\varphi + \psi > 0, \psi < 0\},\ \{\varphi + \psi > 0, \varphi < 0\},$$
$$\{\varphi > 0, \psi = 0\},\ \{\varphi = 0, \psi > 0\}$$

これらの Φ による逆像のコンパクトな台を持つオイラー標数は、容易に求まる。例えば

$$\Phi^{-1}(\varphi>0,\psi>0)=\mathcal{X}_{n,+}(f)\times\mathcal{X}_{n,+}(g)$$

より、

$$\chi^c(\Phi^{-1}(\varphi>0,\psi>0))=(-1)^{nd}a_n^+b_n^+$$

となる。また、

$$\Phi^{-1}(\varphi=0,\psi>0)=\{\gamma_1\mid \mathrm{ord}_t\, f\circ\gamma_1>n\}\times\mathcal{X}_{n,+}(g)$$

より、補題 (2,9) から、

$$\chi^c(\Phi^{-1}(\varphi=0,\psi>0))=(-1)^{nd}A_nb_n^+$$

となる。他も同様に計算される。従って、

(0.3) $$(-1)^{nd}\chi^c(Z\cap\{\varphi+\psi>0\})=a_n^+b_n^++a_n^+b_n^-+a_n^-b_n^++A_nb_n^++a_n^+B_n$$

を得る。

$0<i<n$ に対し、$\pi_{n,i}:\mathcal{L}_n\to\mathcal{L}_i$ を上と同様に自然な射影、$(\gamma_1,\gamma_2)\in Z_i\cap\mathcal{X}_{n,+}(f*g)$ とする。

(0.4) $$f(\gamma_1(t))=d_it^i+\cdots+d_nt^n+\cdots,\quad g(\gamma_2(t))=e_it^i+\cdots+e_nt^n+\cdots$$

と書く。ただし、$d_i\neq0$、$e_i\neq0$、$d_i+e_i=0$、つまり、d_i と e_i は異符号とする。従って、$Z_i\cap\mathcal{X}_{n,+}(f*g)$ は、次の互いに素な二つの集合

$$Z_i^{\pm}=(\pi_{n,i}^{-1}(\mathcal{X}_{i,\pm}(f))\times\pi_{n,i}^{-1}(\mathcal{X}_{i,\mp}(g)))\cap\mathcal{X}_{n,+}(f*g)$$

(複号同順) の和である。写像

$$\Psi:\pi_{n,i}^{-1}(\mathcal{X}_{i,+}(f))\times\pi_{n,i}^{-1}(\mathcal{X}_{i,-}(g))\to\mathbb{R}^{2(n-i)+2}$$

を、(γ_1,γ_2) に対し、(0.4) の係数 $(d_j,e_j)_{j=i,\dots,n}$ を対応させるものと定義する。補題 (2,10) より、Ψ は $\{d_i>0,e_i<0\}$ 上、自明なファイブレーションで、

$$\chi^c(\Psi^{-1}(\{d_i>0,e_i<0\}))=\chi^c(\pi_{n,i}^{-1}(\mathcal{X}_{i,+}(f))\times\pi_{n,i}^{-1}(\mathcal{X}_{i,-}(g)))=(-1)^{nd}a_i^+b_i^-$$

となる。また、$Z_i^+=\Psi^{-1}(\{d_j+e_j=0,j<n,d_n+e_n>0\})$ より、

$$\chi^c(Z_i^+)=(-1)^{n-i}\chi^c(\Psi^{-1}(\{d_i>0,e_i<0\}))$$

となる。同様に、$\chi^c(Z_i^-)$ も求まる。従って、

(0.5) $$(-1)^{nd}\chi^c(Z_i\cap\mathcal{X}_{n,+}(f*g))=(-1)^{n-i}(a_i^+b_i^-+a_i^-b_i^+)$$

を得る。

定理 (2,5) の (1) は、(0.1)、(0.2)、(0.3)、(0.5) より従う。

[2.4] ゼータ関数はブロー解析不変量

$\sigma:(M,E_0)\to(\mathbb{R}^d,0)$、$E_0=\sigma^{-1}(0)$ を実改変とする。解析弧の集合

$$\mathcal{L}(M, E_0) = \{\gamma : (\mathbb{R}, 0) \to (M, E_0) \mid \gamma : \text{解析写像}\ \}$$

に対し、その切断弧の集合を次のように定義する。

$$\mathcal{L}_n(M, E_0) = \mathcal{L}(M, E_0)/\sim$$

ただし、$\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ で、その点での局所座標系で $\gamma_1(t) - \gamma_2(t) = O(t^{n+1})$ のときに、$\gamma_1(t) \sim \gamma_2(t)$ とする。そのとき、$\mathcal{L}_n(M, E_0)$ は、同様に定義された解析多様体 $\mathcal{L}_n(M)$ のなかの解析的集合である。自然な射影 $\mathcal{L}_n(M, E_0) \to E_0$ は、ファイバー $\mathbb{R}^{nd}$ を持つ局所自明なファイブレーションである。

次に、$\pi_n : \mathcal{L}(M, E_0) \to \mathcal{L}_n(M, E_0)$、$\pi_n : \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, 0) \to \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0)$ を切断による自然な射影とする。そのとき、実改変 $\sigma : (M, E_0) \to (\mathbb{R}^d, 0)$ は、合成 $\sigma_*(\gamma)(t) = \sigma(\gamma(t))$ により、写像

$$\sigma_* : \mathcal{L}(M, E_0) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, 0)$$

を誘導する。それは、切断弧上の写像

$$\sigma_{*n} : \mathcal{L}_n(M, E_0) \to \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0).$$

も導く。明らかに、$\pi_n \circ \sigma_* = \sigma_{*n} \circ \pi_n$ が成り立つ。

ここで、[32] のなかで最も重要な役割を果たす補題を述べるために、用語を準備する。

定義 (2,11) X を解析多様体、$A \subset X$ とする。そのとき、A が**大域的に部分解析的** (*globally subanalytic*) とは、解析多様体 $\tilde{X}$、解析埋め込み $i : X \to \tilde{X}$ が存在して、$i(A)$ が $\tilde{X}$ のなかで相対コンパクトかつ部分解析的のときにいう。

自然数 e に対し、$\Delta_e = \{\gamma \in \mathcal{L}(M, E_0) \mid \mathrm{ord}_t\, jac\,\sigma(\gamma(t)) = e\}$、$\Delta_{e,n} = \pi_n(\Delta_e)$ とおく。

補題 (2,12) $e \geq 1$、$n \geq 2e$ とする。このとき、次が成り立つ。

(1) $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{L}(M, E_0)$ とするとき、$\gamma_1 \in \Delta_e$ かつ $\sigma(\gamma_1) \equiv \sigma(\gamma_2) \mod t^{n+1}$ ならば、$\gamma_1 \equiv \gamma_2 \mod t^{n+1-e}$ で $\gamma_2 \in \Delta_e$ である。

(2) $\sigma_{*n}(\Delta_{e,n})$ は $\mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0)$ の大域的に部分解析的な部分集合で、$\sigma_{*n}(\Delta_{e,n})$ の部分解析的滑層分割が存在し、各滑層上 σ_{*n} はファイバー $\mathbb{R}^e$ を持つ自明なファイブレーションである。

$A \subset \mathcal{L}(M, E_0)$ (または、$\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, 0)$) とする。このとき、$A$ が**部分解析的**であるとは、$\mathcal{L}_n(M, E_0)$ (または、$\mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0)$) のある大域的に部分解析的な部分集合 C に対し、$A = \pi_n^{-1}(C)$ と書けるときにいう。A が **n-安定** (n-stable) とは、A が部分解析的で、$A = \pi_n^{-1}(\pi_n(A))$ となるときにいう。補題 (2,12) より、$\sigma_*(\Delta_e)$ は、$2e$-安定であることがわかる。

定義より、各部分解析的な集合 $A \subset \mathcal{L}(M, E_0)$ (または、$\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, 0)$) は、十分大きな n に対し、n-安定である。各 n-安定な A に対し、その**モティヴィック測度** (motivic measure) を次のように与える：

$$\chi^c(A) = (-1)^{-(n+1)d} \chi^c(\pi_n(A))$$

整数値関数 $\varphi : A \to \mathbb{Z}$ が**構成可能** (constructible) であるとは、φ の像が有限で、各 $m \in \mathbb{Z}$ に対し、$\varphi^{-1}(m)$ が部分解析的のときにいう。そのとき、

$$\int_A \varphi \, d\chi^c = \sum_{m \in \mathbf{Z}} m\chi^c(\varphi^{-1}(m))$$

と定義すると、実解析的な範疇での変数変換公式を得る。

定理 (2,13) ([32]) $\sigma : (M, E_0) \to (\mathbb{R}^d, 0)$ を実改変とする。$A \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, 0)$ は部分解析的で、$\mathrm{ord_t}\, jac(\sigma)$ は $\sigma_*^{-1}(A)$ の上で有界と仮定する。そのとき、

$$\chi^c(A) = \int_{\sigma_*^{-1}(A)} (-1)^{-\mathrm{ord_t}\, jac(\sigma)} \, d\chi^c$$

である。

$$[\text{補題 } (2,12)] \Rightarrow [\text{変数変換公式}] \Rightarrow [\text{Denef-Loeser 型公式}]$$

という順で、Denef - Loeser [15] と同じ流れのなかで、上記の結果が示される。ここでは詳しく述べない。

Denef-Loeser のモティヴィック・ゼータ関数は、複素解析的集合芽の位相不変量でないことが、E. Artal Bartolo - P. Cassou-Noguès - I. Luengo - A. Melle Hernández [4] によって知られている。もし、観察 (1,11) に従うなら、実解析関数に対するモティヴィック・ゼータ関数はブロー解析不変量でないのではと思われる人もいるかもしれない。しかし、Denef-Loeser のモティヴィック・ゼータ関数の計算公式は改変の取り方に依らないこと、ブロー解析同値は関数の位相同値が上の解析同値より導かれること、実改変 σ においてその例外集合 E の像 $\sigma(E)$ が実関数の定義域のなかで余次元 2 以上であることなどから、実の場合は、ゼータ関数はブロー解析不変量であることが期待されていた。実際、我々は Denef-Loeser 型公式より、そのことを示した。

定理 (2,14) ([32]) $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ をブロー解析同値な実解析関数芽とする。そのとき、$Z_f = Z_g$、$Z_{f,+} = Z_{g,+}$、$Z_{f,-} = Z_{g,-}$ である。

[2.5] 2 変数 Brieskorn 多項式の分類

$f : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ を $f(x, y) = \pm x^p \pm y^q$、$2 \le p \le q$ で定義される Brieskorn 多項式とする。$p = 1$ のときの f の解析的なタイプは陰関数定理で決まるので、$0 \in \mathbb{R}^2$ が f の特異点の場合を考えている。$\mathbb{N}_e$ (または、$\mathbb{N}_o$) を偶数 (または、奇数) の集合とし、

$$\mathfrak{M} = \{(p, q) \in \mathbb{N}_{\ge 2} \times \mathbb{N}_{\ge 2} \mid p \le q\}$$

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{M} - \{(p, mp) \in \mathfrak{M} \mid p \in \mathbb{N}_o, \ m \in \mathbb{N}_e\}$$

とおく。$(\pm x, \pm y)$ で、次の $\mathbb{R}^2$ の4つの変換からなる Klein 群 $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ を表すことにする：

$$(x,y) \to (x,y),\ (x,y) \to (-x,y),\ (x,y) \to (x,-y),\ (x,y) \to (-x,-y)$$

$\{f(x,y) = \pm x^p \pm y^q \mid (p,q) \in \mathfrak{M}\}$ の部分集合 A に対し、$A/b.a.e$ (または、$A/(\pm x, \pm y)$) で、A のブロー解析同値 (または、Klein G-同値) による商集合を表す。そのとき、次の2変数 Brieskorn 多項式のブロー解析分類を得る。

定理 (2,15) ([32]) $\{f(x,y) = \pm x^p \pm y^q \mid (p,q) \in \mathfrak{M}\}/b.a.e.$

$= \{f(x,y) = \pm x^p \pm y^q \mid (p,q) \in \mathfrak{N}\}/(\pm x, \pm y) \cup \{x^p + y^{mp} \mid p \in \mathbb{N}_o \cap \mathbb{N}_{\geq 2},\ m \in \mathbb{N}_e\}$

2変数 Brieskorn 多項式の福井不変量の計算は容易である。定理 (2,15) の証明に入る前に、そのリストを述べる。

$p, q \in \mathbb{N}$、ただし、$(p,q) = d$ とする。そのとき、$p_1, q_1 \in \mathbb{N}$ で $p = p_1 d,\ q = q_1 d$ かつ $(p_1, q_1) = 1$ となるものが存在する。$[p,q] = LCM(p,q) = p_1 q_1 d = pq_1 = p_1 q$ とおく。これらの記号を用いて、福井不変量のリストは、次のように述べられる。

$f(x,y)$	Fukui invariants
$\pm x^p \pm y^q$, p, q odd	$A(f) = A_+(f) = A_-(f) = p\mathbb{N} \cup q\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_{\geq [p,q]} \cup \{\infty\}$
p odd, q even	$A(f) = p\mathbb{N} \cup q\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_{\geq [p,q]} \cup \{\infty\}$
$\pm x^p + y^q$	$A_+(f) = A(f),\ A_-(f) = p\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_{\geq [p,q]} \cup \{\infty\}$
$\pm x^p - y^q$	$A_-(f) = A(f),\ A_+(f) = p\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_{\geq [p,q]} \cup \{\infty\}$
p even, q odd	$A(f) = p\mathbb{N} \cup q\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_{\geq [p,q]} \cup \{\infty\}$
$x^p \pm y^q$	$A_+(f) = A(f),\ A_-(f) = q\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_{\geq [p,q]} \cup \{\infty\}$
$-x^p \pm y^q$	$A_-(f) = A(f),\ A_+(f) = q\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_{\geq [p,q]} \cup \{\infty\}$
$\pm(x^p - y^q)$, p,q even	$A(f) = p\mathbb{N} \cup q\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_{\geq [p,q]} \cup \{\infty\}$
$x^p - y^q$	$A_+(f) = p\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_{\geq [p,q]} \cup \{\infty\},\ \ A_-(f) = q\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_{\geq [p,q]} \cup \{\infty\}$
$-x^p + y^q$	$A_+(f) = q\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_{\geq [p,q]} \cup \{\infty\},\ \ A_-(f) = p\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_{\geq [p,q]} \cup \{\infty\}$
$\pm(x^p + y^q)$, p,q even	$A(f) = p\mathbb{N} \cup q\mathbb{N} \cup \{\infty\}$
$x^p + y^q$	$A_+(f) = A(f),\ A_-(f) = \{\infty\}$
$-x^p - y^q$	$A_-(f) = A(f),\ A_+(f) = \{\infty\}$

注意 (2,16) $f_1(x,y) = \pm x^p + y^q$、$f_2(x,y) = \pm x^p - y^q$、ただし、p は奇数 q は偶数とする。

q が p で割り切れるとき、$[p,q] = q = q_1 p$ である。従って、$A(f_1) = A_\pm(f_1) = A(f_2) = A_\pm(f_2)$ となる。

q が p で割り切れないとき、$[p,q] > q$ である。従って、$A_+(f_1) \neq A_+(f_2)$、$A_-(f_1) \neq A_-(f_2)$ となる。

上記の福井不変量のリストより、以下の二つの場合を除いて、2変数 Brieskorn 多項式のブロー解析タイプは Klein G-タイプと一致することがわかる。

場合 (1)： $x^p + y^{mp}$ (固定された偶数 p、$m = 1, 2, 3, \cdots$)、
または、$-x^p - y^{mp}$ (固定された偶数 p、$m = 1, 2, 3, \cdots$)

場合 (2)： $\pm x^p + y^{mp}$ と $\pm x^p - y^{mp}$ (固定された奇数 $p \geq 3$ と偶数 m)

最初に、場合 (1) を考える。固定された偶数 p に対し、

$$f_m(x, y) = x^p + y^{mp}, \quad g_m(y) = y^{mp} \quad (m = 1, 2, 3, \cdots)$$

とおく。このとき、

$$A(f_m) = A_+(f_m) = \{p, 2p, 3p, \cdots\} \cup \{\infty\}, \quad A_-(f_m) = \{\infty\} \quad (m = 1, 2, 3, \cdots)$$

で、確かに、福井不変量でそれらのブロー解析タイプは区別できない。一方、p は偶数なので、系 (2,7) から、$Z_{g_m}(T) \neq Z_{g_n}(T)$ なら $Z_{x^p * g_m}(T) \neq Z_{x^p * g_n}(T)$ である。例 (2,3) より、$m \neq n$ のとき $Z_{g_m}(T) \neq Z_{g_n}(T)$ である。従って、$m \neq n$ のとき、f_m と f_n がブロー解析同値でないことは定理 (2,14) から従う。関数 $-x^p - y^{mp}$ のときも同様である。

次に、場合 (2) を考える。このとき、$x^p + y^{mp}$ (または、$x^p - y^{mp}$) は、$-x^p + y^{mp}$ (または、$-x^p - y^{mp}$) に変換 $(x, y) \to (-x, y)$ を通して同値である。従って、固定された奇数 $p \geq 3$ と偶数 m に対し、$f(x, y) = x^p + y^{mp}$ と $g(x, y) = x^p - y^{mp}$ のみについて考えることにする。今、福井不変量 $A(f)$、$A_\pm(f)$ とゼータ関数 $Z_f(T)$、$Z_{f,\pm}(T)$ は、それぞれ、$A(g)$、$A_\pm(g)$、$Z_g(T)$、$Z_{g,\pm}(T)$ に一致していることに注意しておこう。

ここで、もう一度、孤立特異点を持つ擬斉次多項式関数芽族に関する福井 - Paunescu 定理を思い起こそう。

補題 (2,17) ([24]) $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$ を重みの組とし、$f_s : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ ($s \in I = [a, b]$) を実解析関数芽の解析族とする。各 $s \in I$ に対し、α に関する重み付き初期形式は同じ重み付き次数で、$0 \in \mathbb{R}^d$ で孤立特異点を持っていると仮定する。そのとき $\{f_s\}_{s \in I}$ は、I 上ブロー解析自明である。

$\{f_s\}$ を次の式で定義される多項式関数族とする：

$$f_s(x, y) = x^p + pxy^{m(p-1)} + sy^{mp}, \quad s \in [-1, 1]$$

そのとき、補題 (2,17) より、$x^p + pxy^{m(p-1)} + y^{mp}$ と $x^p + pxy^{m(p-1)} - y^{mp}$ はブロー解析同値である。

次に、$\{g_s\}$ と $\{h_s\}$ を次の式で定義される多項式関数族とする：

$$g_s(x, y) = x^p + psxy^{m(p-1)} + y^{mp}, \quad s \in [0, 1]$$
$$h_s(x, y) = x^p + psxy^{m(p-1)} - y^{mp}, \quad s \in [0, 1]$$

そのとき、同様に、$x^p + pxy^{m(p-1)} + y^{mp}$ (または、$x^p + pxy^{m(p-1)} - y^{mp}$) は、$x^p + y^{mp}$ (または、$x^p - y^{mp}$) にブロー解析同値である。従って、

$$x^p + y^{mp} \sim x^p + pxy^{m(p-1)} + y^{mp} \sim x^p + pxy^{m(p-1)} - y^{mp} \sim x^p - y^{mp}$$

となる。

注意 (2,18)　我々のゼータ関数は、上の場合 (2) と下の場合 (3) を除いて、Brieskorn 多項式を Klein G-同値で区別する：

場合 (3)：　$\pm(x^p+y^p)$　(p は偶数)

このとき、$f=\pm(x^p+y^p)$ とすると $Z_f(T)=Z_{f,\pm}(T)=0$ である。従って、これらの関数をゼータ関数では区別できない。しかし、それらの福井不変量は異なる。言い換えると、ブロー解析分類定理の証明において、福井不変量とゼータ関数は相互補完的である。

福井不変量もゼータ関数も、ある自然数を定める弧の集合についての条件で、前者はその集合が空であるかどうかを、後者はその集合のコンパクトな台を持つオイラー標数を問題にしている。上で見たように、実の場合は、その集合が空でなくても、そのコンパクトな台を持つオイラー標数が 0 になることがあり、福井不変量はゼータ関数に含まれない。しかし、複素の場合には、このようなことが起きず、福井不変量はゼータ関数に関する不変量の特別な場合である。

注意 (2,19)　福井不変量、ゼータ関数や上の議論などを用いて、以下の場合を除く 3 変数 Brieskorn 多項式のブロー解析分類が与えられる：

$$\{x^p+y^{kp}+z^{kp}\mid k\in\mathbb{N}\},\quad \{-(x^p+y^{kp}+z^{kp})\mid k\in\mathbb{N}\}$$

ただし、p は偶数とする。

[2.6] $f=x^3+xy^5+z^3$ と $x^3+y^7+z^3$ はブロー解析同値でない

定理 (2,5) より、次の関係式を得る。

(0.6)
$$1+c_n^+=(1+a_n^+)(1+b_n^+)\quad \mathrm{mod}\ 2$$

(1) f の mod 2 正ゼータ関数

例 (2,4) より、

$$Z_{x^3+xy^5,+}(T)=\frac{T^{15}}{1-T^{15}}+\frac{T^3}{1+T^3}\quad \mathrm{mod}\ 2$$

である。従って、

$$Z_{x^3+xy^5,+}(T)=\sum a_i^+T^{3i}\quad \mathrm{mod}\ 2\quad (a_i^+=0,\ 1)$$

と表される。一方、

$$Z_{z^3,+}=T^3-T^6+T^9-T^{12}-\cdots=\sum b_i^+T^{3i}\quad \mathrm{mod}\ 2\quad (b_i^+=1)$$

と表される。

n が 3 の倍数でないとき、$1+a_n^+=1+b_n^+=1$ mod 2 である。(0.6) より、$1+c_n^+=1$ mod 2 となり、$c_n^+=0$ mod 2 となる。

n が 3 の倍数のとき、$1+b_n^+=0 \mod 2$ より、$c_n^+=1 \mod 2$ となる。

ここで、$Z_{f,+}=\sum c_n^+(f)T^n$ とおくと、n が 3 の倍数であるときは $c_n^+(f)=1 \mod 2$ で、n が 3 の倍数でないときは $c_n^+(f)=0 \mod 2$ である。

(2) g の mod 2 正ゼータ関数

g の各単項式の正ゼータ関数は、以下のものである。

$$Z_{x^3,+}(T)=Z_{z^3,+}(T)=T^3-T^6+T^9-\cdots$$
$$Z_{y^7,+}(T)=T^7-T^{14}+T^{21}-\cdots$$

$Z_{x^3+z^3,+}(T)=\sum a_n^+T^n$ とおくと、(0.6) の関係式を用いて、n が 3 の倍数であるときは $a_n^+=1 \mod 2$ で、n が 3 の倍数でないときは $a_n^+=0 \mod 2$ であることがわかる。

また、$Z_{y^7,+}(T)=\sum b_n^+T^n$ とおくと、n が 7 の倍数であるときは $b_n^+=1 \mod 2$ で、n が 7 の倍数でないときは $b_n^+=0 \mod 2$ である。

ここで、$Z_{g,+}=\sum c_n^+(g)T^n$ とおくと、(0.6) より、n が 3 または 7 の倍数であるときは $c_n^+(g)=1 \mod 2$ で、他のときは $c_n^+(g)=0 \mod 2$ である。

以上のことより、定理 (2,14) から、f と g はブロー解析同値ではない。

この節の終わりに、モティヴィック積分やモティヴィック・ゼータ関数に関する文献をいくつか述べる。モティヴィック積分の概念は、よく知られているように、M. Kontsevich [33] による双有理同値な Calabi-Yau 多様体は同じ Hodge 数を持つことの証明のなかで創り出されたものである。その仕事は、その後、J. Denef - F. Loeser [14, 15, 16, 18, 19] により、発展されている。また、V. Batyrev は、ミラー対称性の仕事と関連して、モティヴィック積分の手法を用いて新たな不変量を導入している ([6, 7, 8])。この方面の優れた概説としては、J. Denef - F. Loeser 自身による [17] や E. Looijenga による [47] があり、A. Craw による入門的な [11] もある。また、昨年 9 月の札幌での特異点論国際研究集会で、W. Veys が非常に明快な連続講義 [63] を行った。そこでは、p-進数理論との類似性からのこの分野の発展の経緯や主要問題の一つであるモノドロミー予想の謂れなども解説された。

モティヴィック積分やモティヴィック・ゼータ関数に関する仕事は、一般には、標数 0 の体上の話しとして展開されるが、複素数体上に限定された仕事も多くあり、ここでは、そのあたりを厳密に区別して書いていない。この分野の研究はヨーロッパで非常に盛んになっており、上記の仕事以外にも、B. Rodrigues - W. Veys [54, 55]、W. Veys [61, 62, 64, 65] や、E. Artal Bartolo - P. Cassou-Noguès - I. Luengo - A. Melle Hernández [4, 5] といったスペインのグループによる仕事などもある。

一方、実の場合にも、この分野に関する仕事が出始めて来ている。我々の仕事 [32] よりも前に、半代数的集合のコンパクトな台を持つオイラー標数に関する R. Quarez [56] の仕事があり、以後にも、実モティヴィック・ゼータ関数に関連する上述の O. M. Abderrahmane Yacoub [2] や次節で触れる G. Fichou [20] 他がある。

§3. これからの問題

[3.1] 新たなブロー解析不変量の導入

問題 (3,1) 福井不変量、我々のゼータ関数を含み、更に、注意 (2,19) の関数を区別するブロー解析不変量を導入せよ。

(1) 福井不変量、我々のゼータ関数を含み、注意 (2,19) の関数を区別する不変量として、最近、G. Fichou [20] によって、弧の集合の**仮想ベッチ数** (virtual Betti number) を係数とするゼータ関数が導入された。しかし、このゼータ関数がブロー解析不変量であるかどうかはわかっていない。

(2) 5年前に行われた数理解析研究所研究集会「特異点論と微分方程式」において、L. Paunescu は、福井不変量を含むブロー解析不変量でとして、弧の対に関する一般化された福井不変量をアナウンスした。これも注意 (2,19) の関数を区別するが、ブロー解析不変量であることの証明に不備な点があり、今もその難点は乗り越えられていない。

[3.2] 不変量に潜む性質の発見

問題 (3,2) 福井不変量、モティヴィック・ゼータ関数や Fichou のゼータ関数に潜む (初等整) 数論的性質や新たな計算公式を見つけよ。

(1) 福井不変量に関し、定理 (1,8) のような初等整数論的性質が成り立っている。我々が気付かないだけで、このような性質が、福井不変量のみならず、モティヴィック・ゼータ関数や Fichou のゼータ関数にも潜んでいるものと思われる。

(2) 不変量に対する一般的な計算公式としては、福井不変量に対しては定理 (1,6)、(1,7)、種々のゼータ関数に対しては Denef Loeser 型公式が知られている。また、個々の限定された特殊な場合について、いくつかの計算し易い公式も得られている。特殊化による奇麗な公式の発見は、これからも期待される。

[3.3] 不変量の応用

問題 (3,3) 不変量を用いて、より多くの特異点を分類せよ。

(1) 孤立特異点を持つ n 変数実擬斉次多項式関数芽のブロー解析タイプは、それらの関数の重みを決定するかという問題は、1節で述べたように、2変数の場合には O. M. Abderrahmane Yacoub 氏によって、福井不変量やゼータ関数を用いて肯定的に解決されている。では、3変数以上のときはどうであろうか。

(2) n 変数 Brieskorn 多項式 ($n \geq 3$) や擬斉次多項式などの実解析的特異点をそれらの不変量を用いて分類せよ。

§4. 練習問題の解答

練習問題１の解答

最初に、次の式が成り立つことに注意しておこう。

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}(a_k^+b_k^- + a_k^-b_k^+) + \sum_{k=1}^{n}(a_k^+b_k^- + a_k^-b_k^+)$$
$$= 2\sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(a_{n-2i}^+b_{n-2i}^- + a_{n-2i}^-b_{n-2i}^+) = 2\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}(a_i^+b_i^- + a_i^-b_i^+))$$

「$\tilde{C}_n^+ = \tilde{A}_n^+\ \tilde{B}_n^+$」のみを示す。「$\tilde{C}_n^- = \tilde{A}_n^-\ \tilde{B}_n^-$」も同様に示される。計算の便宜上、我々は「$1-\tilde{C}_n^+ = 1-\tilde{A}_n^+\ \tilde{B}_n^+$」を示すことにする。

$$1-\tilde{C}_n^+$$
$$= \sum_{k=1}^{n}c_k - c_n^+$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(a_k^+b_k^+ + a_k^-b_k^-) + \sum_{k=1}^{n}a_kB_k + \sum_{k=1}^{n}A_kb_k + 2\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}(a_i^+b_i^- + a_i^-b_i^+))$$
$$- a_n^+b_n^+ - a_n^+B_n - A_nb_n^+ - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}(a_k^+b_k^- + a_k^-b_k^+)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}a_kB_k + \sum_{k=1}^{n}A_kb_k - a_n^+b_n^+ - a_n^+B_n - A_nb_n^+ + \sum_{k=1}^{n}a_kb_k$$
$$- \sum_{k=1}^{n}(a_k^+b_k^- + a_k^-b_k^+) + 2\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}(a_i^+b_i^- + a_i^-b_i^+)) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}(a_k^+b_k^- + a_k^-b_k^+)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}a_k(1-\sum_{i=1}^{k}b_i) + \sum_{k=1}^{n}b_k(1-\sum_{i=1}^{k}a_i) - a_n^+b_n^+ - a_n^+B_n - A_nb_n^+ + \sum_{k=1}^{n}a_kb_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n}a_k + \sum_{k=1}^{n}b_k - (\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{i=1}^{k}b_i + \sum_{k=1}^{n}b_k\sum_{i=1}^{k}a_i) - a_n^+b_n^+ - a_n^+B_n - A_nb_n^+ + \sum_{k=1}^{n}a_kb_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n}a_k + \sum_{k=1}^{n}b_k - \sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}b_k - (a_n^+b_n^+ + a_n^+B_n + A_nb_n^+)$$
$$= 1-(1-\sum_{k=1}^{n}a_k)(1-\sum_{k=1}^{n}b_k) - (a_n^+b_n^+ + a_n^+B_n + A_nb_n^+)$$
$$= 1-(A_nB_n + a_n^+b_n^+ + a_n^+B_n + A_nb_n^+)$$
$$= 1-(A_n + a_n^+)(B_n + b_n^+)$$
$$= 1-\tilde{A}_n^+\ \tilde{B}_n^+$$

練習問題 2 の解答

最初に、j に関する帰納法で $j=0,1,2,\cdots$ に対し、

$$B(H_j(T)) = -a_nT^n - \cdots - a_{n+j}T^{n+j} + b'_{n+j+1}T^{n+j+1} + b'_{n+j+2}T^{n+j+2} + \cdots$$

となる多項式変換 $H_j(T)$ が存在することを示す。

n が偶数のとき、a_n と b_n の符号は異なることより、$-\frac{a_n}{b_n} > 0$ である。従って、偶奇にかかわらず、$\alpha = \sqrt[n]{-\frac{a_n}{b_n}}$ とし $H(T) = \alpha T$ とおくと、$B(H(T))$ の T^n の係数は $-a_n$ となる。従って、$j=0$ の場合は示された。

次に、$j=k \geq 0$ の場合に正しいことが示されていると仮定する。即ち、多項式変換 $H_k(T)$ で

$$B(H_k(T)) = -a_nT^n - \cdots - a_{n+k}T^{n+k} + b'_{n+k+1}T^{n+k+1} + b'_{n+k+2}T^{n+k+2} + \cdots$$

となるものが存在するとする。簡単のため、$F(T) = B(H_k(T))$ とおく。$H[\beta](T) = T + \beta T^{k+2}$ とすると、

$$F(H[\beta](T)) = -a_nT^n - \cdots - a_{n+k}T^{n+k} + (-a_n n\beta + b'_{n+k+1})T^{n+k+1} + \hat{b}_{n+k+2}T^{n+k+2} + \cdots$$

となる。β が実数全体を動くとき、T^{n+k+1} の係数 $-a_n n\beta + b'_{n+k+1}$ も実数全体を動く。この係数が $-a_{n+k+1}$ となるように β を定めた $H[\beta](T)$ を $H(T)$ とおき、$H_{k+1}(T) = H_k(H(T))$ とおく。このとき、多項式変換の合成も多項式変換より、$H_{k+1}(T)$ も多項式変換で、$B(H_{k+1}(T))$ は求められた形式である。従って、$j=k+1$ の場合も求められた形の多項式変換の存在が言えたので、任意の j に対し示された。

最後に、問題を示す。上のことより、多項式変換 $H_{m-n-1}(T)$ で

$$B(H_{m-n-1}(T)) = -a_nT^n - \cdots - a_{m-1}T^{m-1} + b_m{}''T^m + b_{m+1}{}''T^{m+1} + \cdots$$

となるものが存在する。上と同様に、$H[\beta](T) = T + \beta T^{m-n+1}$ とすると、

$$B(H_{m-n-1}(H[\beta](T))) = -a_nT^n - \cdots - a_{m-1}T^{m-1} + (-a_n n\beta + b_m{}'')T^m + b'_{m+1}T^{m+1} + \cdots$$

となる。ここで、$a_m + (-a_n n\beta + b_m{}'') \neq 0$ となるように β を選んだ $H[\beta](T)$ に対し、$H(T) = H_{m-n-1}(H[\beta](T))$ とおくと、$B(H(T))$ が求める形式になる。

References

[1] O. M. Abderrahmane Yacoub, *Polyèdre de Newton et trivialité en famille,* J. Math. Soc. Japan **54** (2002), 513–550.

[2] O. M. Abderrahmane Yacoub, *Weighted homogeneous polynomials and blow-analytic equivalence,* preprint.

[3] V.I. Arnold, *Normal forms for functions in neighbourhood of degenerate critical points,* Uspekhi Mat. Nauk **29** (1974), 11–49 = Russian Math. Surveys **29** (1974), 19–48.

[4] E. Artal Bartolo - P. Cassou-Noguès - I. Luengo - A. Melle Hernández, *The Denef-Loeser zeta function is not a topological invariant,* J. London Math. Soc. (2) **65** (2002), 45–64.

[5] E. Artal Bartolo - P. Cassou-Noguès - I. Luengo - A. Melle Hernández, *Monodromy conjecture for some surface singularities,* Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **35** (2002), 605–640.

[6] V. Batyrev, *Birational Calabi-Yau n-folds have equal Betti numbers,* New Trends in Algebraic Geometry, Euro conference on Algebraic Geometry (Warwick 1996), K. Hulek et al Ed., LMS Lect. Note **264** (1999), pp. 1–11.

[7] V. Batyrev, *Stringy Hodge numbers of varieties with Gorenstein canonical singularities,* Integrable Systems and Algebraic Geometry (Kobe/Kyoto 1997), World Sci. Publ. (1999), pp. 1–32.

[8] V. Batyrev, *Non-Archimedian integrals and stringy Euler numbers of log terminal pairs,* J. Europ. Math. Soc. **1** (1999), 5–33.

[9] E. Bierstone, P. D. Milman, *Arc-analytic functions,* Invent. math. **101** (1990), 411–424.

[10] E. Bierstone, P. D. Milman, *Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant,* Invent. math. **128** (1997), 207–302.

[11] A. Craw, *An introduction to motivic integration,* arXiv:math.AG/9911179.

[12] J. Damon, *Finite determinacy and topological triviality I,* Invent. math. **62** (1980), 299–324.

[13] J. Damon, T. Gaffney *Topological triviality of deformations of functions and Newton filtrations,* Invent. math. **72** (1983), 335–358.

[14] J. Denef, F. Loeser, *Motivic Igusa zeta functions,* J. Algebraic Geom. **7** (1998), 505–537.

[15] J. Denef, F. Loeser, *Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration,* Invent. math. **135** (1999), 201–232.

[16] J. Denef, F. Loeser, *Motivic exponential integrals and a motivic Thom-Sebastiani Theorem,* Duke Math. J. **99** (1999), 289–309.

[17] J. Denef, F. Loeser, *Geometry of arc spaces of algebraic varieties,* European Congress of Math. (Barcelona, July 10-14, 2000) 1 (2001), 325-348.

[18] J. Denef, F. Loeser, *Lefschetz numbers of iterates of the monodromy and truncated arcs,* Topology **41** (2002), 1031–1040.

[19] J. Denef, F. Loeser, *Motivic integration, quotient singularities and McKay correspondence,* Compositio Math. **131** (2002), 267–290.

[20] G. Fichou, *Motivic invariants of arc-symmetric sets and blow-Nash equivalence,* preprint.

[21] T. Fukui, E. Yoshinaga, *The modified analytic trivialization of family of real analytic functions,* Invent. math. **82** (1985), 467–477.

[22] T. Fukui, *Seeking invariants for blow-analytic equivalence,* Compositio Math. **105** (1997), 95–107.

[23] T. Fukui, S. Koike, T.-C. Kuo, *Blow-analytic equisingularities, properties, problems and progress,* Real Analytic and Algebraic Singularities, T. Fukuda, T. Fukui, S. Izumiya and S. Koike Ed., Pitman Research Notes in Mathematics Series **381** (1998), pp. 8–29.

[24] T. Fukui, L. Paunescu, *Modified analytic trivialization for weighted homogeneous function-germs,* J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 433–446.

[25] T. Fukui, L. Paunescu, *On blow-analytic equivalence,* (to appear).

[26] T. Fukui, K. Kurdyka, L. Paunescu, *An inverse mapping theorem for arc analytic homeomorphisms,* Banach Center Publications (to appear).

[27] J.-P. Henry, A. Parusiński, *Existence of Moduli for bi-Lipschitz equivalence of analytic functions,* Compositio Math. **136** (2003), 217–235.

[28] J.-P. Henry, A. Parusiński, *Invariants of bi-Lipschitz equivalence of real analytic functions,* Banach Center Publications (to appear).

[29] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: I, II,* Ann. of Math. **79** (1964), 109–302.

[30] S. Izumi, S, Koike, T.-C. Kuo, *Computations and Stability of the Fukui Invariant,* Compositio Math. **130** (2002), 49–73.

[31] H. King, *Topological types in families of germs,* Invent. math. **62** (1980), 1–13.

[32] S. Koike, A. Parusiński, *Motivic-type invariants of blow-analytic equivalence*, Ann. Inst. Fourier **53** (2003), 2061–2104.
[33] M. Kontsevich, Lecture at Orsay (December 7, 1995).
[34] A.G. Kouchnirenko, *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor,* Invent. math. **32** (1976), 1–31.
[35] W. Kucharz, *Examples in the theory of sufficiency of jets,* Proc. Amer. Math. Soc. **96** (1986),163–166.
[36] N. Kuiper, *C^1-equivalence of functions near isolated critical points,* Symp. Infinite Dimensional Topology (Baton Rouge 1967), Princeton Univ. Press, R. D. Anderson Ed., Annales of Math. Studies **69** (1972), pp. 199–218.
[37] T.-C. Kuo, *On C^0-sufficiency of jets of potential functions,* Topology **8** (1969), 167–171.
[38] T.-C. Kuo, *Characterization of v-sufficiency of jets,* Topology **11** (1972), 115–131.
[39] T.-C. Kuo, *Une classification des singularités réeles,* C. R. Acad. Sci. Paris **288** (1979), 809–812.
[40] T.-C. Kuo, *The modified analytic trivialization of singularities,* J. Math. Soc. Japan **32** (1980), 605–614.
[41] T.-C. Kuo, *On classification of real singularities,* Invent. math. **82** (1985), 257–262.
[42] T.-C. Kuo, *René Thom and some of his ideas,* preprint.
[43] K. Kurdyka, *Ensembles semi-algébriques symétriques par arcs*, Math. Ann. **282** (1988), 445–462.
[44] K. Kurdyka, *Injective endomorphisms of real algebraic sets are surjective*, Math. Ann. **282** (1998), 1–14.
[45] Lê Dũng Tráng, *Topologie des singularités des hypersurfaces complexes*, Singularités à Cargèse, Astérisque, **7** et **8** (1973), 171–182.
[46] S. Łojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques,*, I.H.E.S. 1965
[47] E. Looijenga, *Motivic Measures,* in Séminaire Bourbaki, exposé 874, Mars 2000.
[48] C. McCrory, A. Parusiński, *Complex monodromy and the topology of real algebraic sets,* Compositio Math. **106** (1997), 211–233.
[49] J. Milnor, P. Orlik, *Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials,* Topology **9** (1970), 385–393.
[50] J. Nash, *Arc structure of singularities,* Duke Math. J. **81** (1995), 31–38.
[51] T. Nishimura, *Topological invariance of weights for weighted homogeneous singularities,* Kodai Math. J. **9** (1986), 188–190.
[52] M. Oka, *On the bifurcation of the multiplicity and topology of the Newton boundary,* J. Math. Soc. Japan **31** (1979), 435–450.
[53] M. Oka, *On the stability of the Newton boundary,* Proc. Sympos. Pure Math. **40** (part II) (1983), 259–268.
[54] B. Rodrigues, W. Veys, *Holomorphy of Igusa's and topological zeta functions for homogeneous polynomials,* Pacific J. Math. **201** (2001), 429–440.
[55] B. Rodrigues, W. Veys, *Poles of zeta functions on normal surfaces,* Proc. London Math. Soc. **87** (2003), 164–196.
[56] R. Quarez, *Espace des germes d'arcs réels et série de Poincaré d'un ensemble semi-algébrique,* Ann. Inst. Fourier, **51** (2001), 43–67.
[57] O. Saeki, *Topological invariance of weights for weighted homogeneous isolated singularities in $\mathbb{C}^3$*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 995-999.
[58] M. Suzuki, *Stability of the Newton boundaries of a family of real analytic singularities,* Trans. Amer. Math. Soc. **323** (1991), 133-150.
[59] M. Suzuki, *Constancy of orders of blow-analytic equisingularities,* preprint.
[60] B. Teissier, *Cycles évanescents, sections planes, et conditions de Whitney,* Singularités à Cargèse, Astérisque, **7** et **8** (1973), 285–362.

[61] W. Veys, *The topological zeta function associated to a function on a normal surface germ,* Topology **38** (1999), 439–456.
[62] W. Veys, *Zeta functions and 'Kontsevich invariants' on singular varieties,* Canadian J. Math. **53** (2001), 834–865.
[63] W. Veys, *Arc spaces, moivic integration and stringy invariants*, Hokkaido University Technical Report Series in Mathematics, **78** (2003), 255–277.
[64] W. Veys, *Stringy invariants of normal surfaces,* J. Algebraic Geometry (to appear).
[65] W. Veys, *Stringy zeta functions of* $\mathbb{Q}$*-Gorenstein varieities,* Duke Math. J. (to appear).
[66] Stephen S.-T. Yau, *Topological types and multiplicity of isolated quasihomogeneous surface singularities,* Bull. Amer. Math. Soc. **19** (1988), 447–454.
[67] E. Yoshinaga, M. Suzuki, *Topological types of quasihomogeneous singularities in* $\mathbb{C}^2$, Topology **18** (1979), 113–116.
[68] O. Zariski, *Some open questions in the theory of singularities,* Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 481–491.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, HYOGO UNIVERSITY OF TEACHER EDUCATION, 942-1 SHIMOKUME, KATO, YASHIRO, HYOGO 673-1494, JAPAN
E-mail address: `koike@sci.hyogo-u.ac.jp`

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES, UNIVERSITÉ D'ANGERS, 2, BD LAVOISIER, 49045 ANGERS CEDEX, FRANCE
E-mail address: `parus@tonton.univ-angers.fr`